6 Schätzen und Testen

In diesem Abschnitt werden Grundlagen und Anwendungen sowohl im Schätzen als auch im Testen bestimmt. Dabei liegt der Schwerpunkt beim Testen.

Beispiel 1 beinhaltet eine Einführung in Tests. Es handelt sich um ein leichtes Beispiel, in dem die Grundbegriffe von Tests nach und nach eingeführt werden. Bei der Bearbeitung scheint sinnvoll, dass der Teil b) besprochen wird, bevor die Schüler Teil c) lösen, da hier das Zwischenergebnis ($X \geqslant 7$) benötigt wird. Es lohnt sich zu überlegen, warum eine Wahrscheinlichkeit von unter $\frac{1}{2}$ für das Erkennen der Stifte nicht sinnvoll ist.

In Teil c) bestimmt man den Fehler 1. Art des Tests mit den Bleistiften. Anschließend wird im Aufgabenteil d) der Fehler 2. Art untersucht. Die Begriffe „Fehler 1. Art“ und „Fehler 2. Art“ tauchen in den Teilaufgaben noch nicht auf und können anschließend eingeführt werden.

Das Ergebnis von Teil e) legt eine Bemerkung bzgl. des Zusammenhangs der Fehler 1. und 2. Art bei der Veränderung eines der Fehler nahe.

Im Beispielteil f) wird die Setzung einer Grenze für die Hypothese untersucht. Anschließend kann die Definition von *Signifikanztest zum Signifikanzniveau* α bzw. des *Konfidenzintervalls* folgen.

In Beispiel 2 wird anhand eines Datensatzes von Temperaturmessungen ein Test ausführlich durchgeführt. Dabei werden Hypothese, Alternative und Konfidenzintervall untersucht. Einzelne Größen werden verändert und Beobachtungen bzgl. der Wirkung der Veränderungen durchgeführt. Im Teil d) wird die Standardabweichung verändert und die Wirkung untersucht.

In den Beispielen wird auf die Erklärung der Bezeichnungen des ClassPad und die „Übersetzung“ in die in diesem Arbeitsheft üblichen Bezeichnungen geachtet. Dies wird an zahlreichen Abbildungen gezeigt.

Die erste Vertiefung bietet eine Einführung in das Schätzen. Die Grundlagen werden an einer hypergeometrischen Verteilung behandelt und führen zu Fehlern 1. und 2. Art. Außerdem werden Anwendungskennlinien untersucht.

In der zweiten Vertiefung wird an einem Binomialtest die *Gütefunktion* eingeführt und untersucht. Dabei werden die Veränderungen der Gütefunktion in Abhängigkeit von den Variablen p und n betrachtet.

Schätzen und Testen

Beispiel 1 Alex sagt Elena, sie solle ihm drei Bleistifte geben, von denen zwei von derselben Firma sind. Er behauptet, dass er mit einer Wahrscheinlichkeit von über $p_0 = \frac{1}{3}$ am Geschmack der Stifte erkennen kann, welche zwei der drei Stifte aus derselben Firma kommen.

Elena möchte Alex testen und wird ihm zehn Mal drei Bleistifte reichen, von denen jeweils zwei Stifte aus derselben Firma stammen. Sie wird seine Behauptung bestätigen, wenn er mindestens sieben Mal den Stift der anderen Firma erkennt. Sonst wird sie vermuten, dass Alex geraten hat und daher seine Erfolgsrate gleich p_0 ist.

a) Definieren Sie die Nullhypothese H_0 und die Alternative H_1 des Tests, den Elena mit Alex machen möchte.

b) Geben Sie für die Zufallsgröße
X: „Anzahl von Alex' Erfolgen der 10 Versuche“
die Bedingung des Verwurfs der Hypothese H_0 an.

c) Elena möchte wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit sie Alex zu Unrecht besondere Fähigkeiten zuspricht.
Sie geht davon aus, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit bei jedem Versuch gleich ist und die Versuche voneinander unabhängig sind. Welche Verteilung ist für die Zufallsgröße X sinnvoll?
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Alex zu Unrecht besondere Fähigkeiten zugesprochen werden.

d) Alex nimmt an, dass er eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $p_1 = \frac{1}{2}$ hat, was deutlich besser ist als $p_0 = \frac{1}{3}$. Bestimmen Sie die Verteilung von X und berechnen Sie die Chancen von Alex, seine Fähigkeiten nachzuweisen.

e) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeiten
$P(X \geqslant k)$ für $p_0 = \frac{1}{2}$ und $1 - P(X \geqslant k)$ für $p_1 = \frac{1}{3}$ mit $0 \leqslant k \leqslant 10$
gemeinsam als Histogramme dar und interpretieren Sie sie.

f) Begründen Sie, dass für den Erwartungswert der Zufallsgröße X gilt: $\mathbb{E}(X) = n \cdot p_0$.
Es sei c die Grenze, so dass H_0 abgelehnt werden soll, wenn $X \geqslant c$ gilt.
Erklären Sie, warum $c \geqslant n \cdot p_0$ vernünftig ist.

Beispiel 2 In Niederhückelsdorf wurde an 16 aufeinander folgenden Sonntagen die Temperatur des Baches Nuhr gemessen. Dabei ergaben sich die folgenden Ergebnisse $x_1, x_2, \ldots, x_{16}$:

12,43	12,01	9,03	8,91	12,34	10,75	8,56	15,95
9,26	9,07	13,20	9,40	11,36	12,55	8,05	10,99

Zur Analyse der Messwerte geht man davon aus, dass die Messwerte x_i zu unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen X_i gehören.

a) Schätzen Sie die Erwartungswerte $\mathbb{E}(X_i)$ und die Standardabweichungen σ.

b) Nach jahrelanger Erfahrung geht man davon aus, dass die Zufallsgrößen X_i normalverteilt sind. Außerdem schätzt man die Standardabweichung auf $\sigma = 2$.

Jetzt soll die Hypothese
$H_0\colon\ \mu \leqslant 10$ gegen die Alternative $H_1\colon\ \mu > 10$ und das Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$ überprüft werden. Notieren Sie die Entscheidungsregel.
Welche Entscheidung ist nach den oben notierten Messwerten zu treffen?

Hinweis. Verwenden Sie den Parametertest `1-Stichprob. Z-Test` mit *Mittelpunkthypothese* unter `Calc` → `Test`.

Beispiel 3 Auf einem Volksfest werden an einem Stand Lose verkauft. Die Behauptung des Anbieters ist, dass man eine Gewinnchance von 20 % hat.

Philipp möchte wissen, ob diese Behauptung stimmt. Er geht davon aus, dass es höchstens 20 % Gewinnchance gibt, und stellt die Hypothese

$H_0\colon\ p = 0{,}2$ gegen die Alternative $H_1\colon\ p < 0{,}2$

auf. Philipp will eine Stichprobe über 50 Lose machen. Zur Untersuchung definiert er die Zufallsgröße

X: „Anzahl der Erfolge bei 50 Losen“

a) Wie groß ist der Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$, wenn die Hypothese gültig ist?
b) Bestimmen Sie alle $c < \mathbb{E}(X)$ die Wahrscheinlichkeit $P(X \leqslant c)$.

Hinweis. Benutzen Sie `Calc` → `Verteilung` in Statistik und wählen Sie hier `Verteilung` → `Binom. Vert.-fkt.`

c) Philipp möchte sein Ergebnis soll mit einer Signifikanz $\alpha = 0{,}05$ absichern. Für welche c gilt $P(X \leqslant c) \leqslant \alpha$? Wählen Sie c so aus, dass der Fehler 2. Art möglichst gering ist. Treffen Sie hiermit eine Entscheidung.
d) Wie sollte Philipp die Behauptung des Anbieters beurteilen?

Lösung von Beispiel 1.

a) H_0: „Alex rät nur“, also $p = p_0\left(= \frac{1}{3}\right)$.

H_1: „Alex erkennt die Stifte am Geschmack“, also $p > p_0\left(= \frac{1}{3}\right)$.

b) Wenn $X \geqslant 7$ gilt, wird H_0 verworfen.

c) Elena würde Alex glauben, wenn er durch Raten mindestens sieben Erfolge erzielt.

Sinnvoll ist eine Binomialverteilung $B(10; \frac{1}{3})$, da die Reihenfolge der richtigen und falschen Ergebnisse unbedeutend ist. Die Berechnung kann unter Main mit

`Interaktiv` → `Verteilungsfunktionen` → `Diskret` → `binomialCDf`

gemacht werden. Das Ergebnis ist in Abbildung 1 zu sehen. Damit gilt

$$P(X \geqslant 7) = 0{,}01966 \approx 0{,}02\,,$$

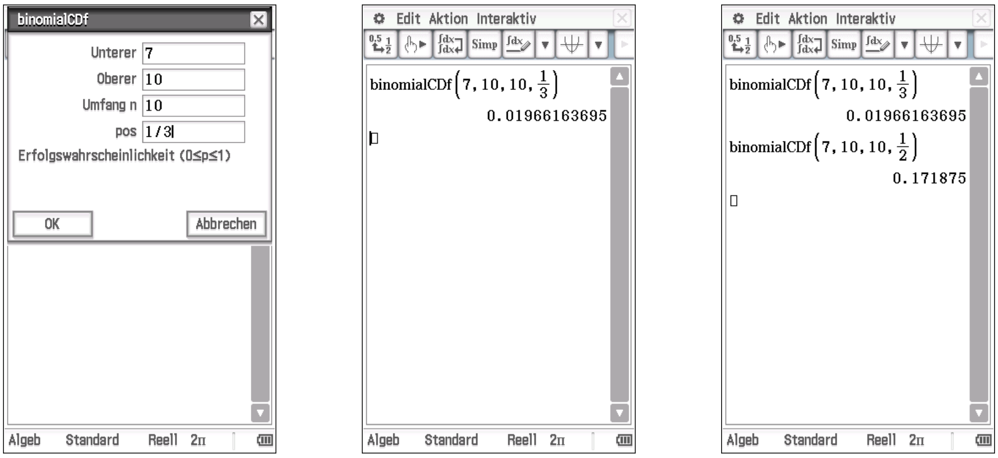

Abbildung 1: Berechnung für mindestens sieben positive Ergebnisse

und die Wahrscheinlichkeit für einen voreiligen Zuspruch (Fehler 1. Art) ist gleich 0,02.

d) Die Zufallsgröße X ist jetzt $B(10; \frac{1}{2})$-verteilt. Damit gilt (vgl. Abbildung 1)

$$P(X \geqslant 7) = 0{,}171875 \approx 0{,}17.$$

Alex würde dementsprechend seine Behauptung mit der Wahrscheinlichkeit

$$1 - P(X \geqslant 7) = P(X < 7) \approx 0{,}83$$

nicht halten können. Dies wäre ein Fehler 2. Art.

e) Zunächst sollen die Werte in die Tabellenkalkulation eingetragen werden. Um es einfacher zu machen, definieren wir unter Main eine Funktion `P` zu $P(X \geqslant k)$ für $p_0 = \frac{1}{2}$ und eine Funktion `Q` zu $1 - P(X \geqslant k)$ für $p_1 = \frac{1}{3}$, siehe Abbildung 2, links. Über `Edit` → `Füllen` → `Mit Werten füllen` lassen sich Funktionswerte in Tabellenkalkulation berechnen, vgl. die Mitte von Abbildung 2. Anschließend werden die Werte mit `Datei` → `Export` in die Listen `p0` und `p1` in Statistik kopiert. Die Parameter für die Histogramme werden folgendermaßen gesetzt:

```
Variable  p0
Typ       LISTE
Bereich   B1:B11
```

Unter Statistik wird für beide Datensätze ein Histogramm gezeichnet, siehe Abbildung 2, rechts.

Das blaue Histogramm mit den sinkenden Werten gehört zur Reihe p_0, das andere zur Reihe p_1. Am Histogramm wie an der Wertetabelle ist erkennbar, dass für $c \leqslant 4$ die Wahrscheinlichkeiten der Hypothese $H_0\colon\ p = p_0$ größer sind als die Wahrscheinlichkeiten der Alternativen $H_1\colon\ p \geqslant p_0$. Für $c > 4$ kehrt sich das Verhältnis um.

f) Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt. Es sind im Mittel $n \cdot p_0$ Erfolge. Da es eine Abweichung des Mittels vom Erwartungswert gibt, sollte man die Grenze $c > n \cdot p_0$ mit einem gewissen Spielraum setzen.

Lösung von Beispiel 2. a) Wir geben die Werte in Statistik in eine Spalte `temp` der Temperatur ein, vgl. Abbildung 3, links.

Nun definieren wir die Parameter unter:

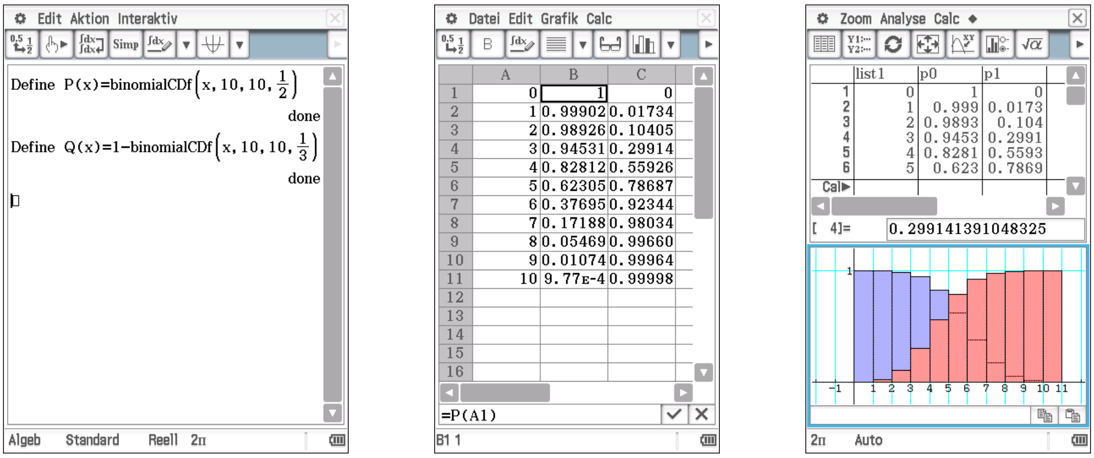

Abbildung 2: Histogramme für $P(X \geqslant k)$ bei $p_0 = \frac{1}{2}$ und $1 - P(X \geqslant k)$ bei $p_1 = \frac{1}{3}$

`Calc` $\to$ `Eindim. Variable`

führen eine statistische Analyse mit den Einstellungen

`X-List:`	`main\temp`
`Häufigk:`	`1`

durch und erhalten das Ergebnis Abbildung 3, rechts.

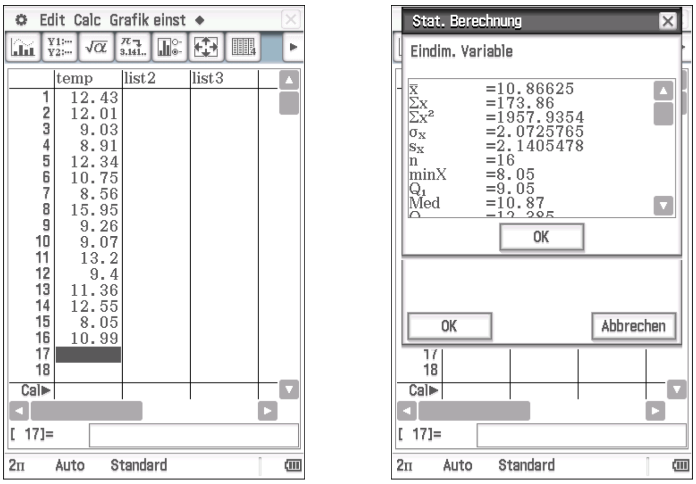

Abbildung 3: Statistische Berechnungen zu den Temperaturen

Damit gilt $\mu \approx 10{,}86625$ und $\sigma \approx 2{,}0725765$.

Hinweis. Im ClassPad gibt es zur Berechnung der Standardabweichung

$$\sigma_x = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \quad \text{und} \quad s_x = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2.$$

Wir verwenden hier das Ergebnis σ_x.

b) Wir öffnen `1-Stichprob. Z-Test` unter der Option `Variable`, erhalten Abbildung 4, links, und geben die dort erkennbaren Werte ein. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4, rechts, zu sehen.

Mit

`Calc` $\to$ `Konfidenzintervall`

öffnet sich das Fenster Abbildung 5, links.

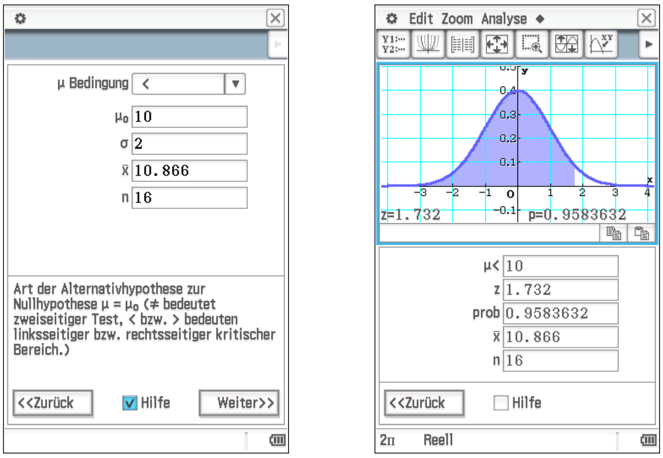

Abbildung 4: Die Hypothese $H_0\colon\ \mu \leqslant 10$

Die Berechnungen sollen für die Liste `main\temp` durchgeführt werden. Daher wählen wir `Liste`. Zu den Einstellungen der folgenden Oberfläche vgl. Abbildung 5. Hier bedeuten

`C-Niveau`: (Irrtumswahrscheinlichkeit α)

σ : Standardabweichung

`List` : Liste der eingelesenen Daten

`Häufigk` : Maßstab der Häufigkeit

Das Ergebnis sehen Sie in Abbildung 5, rechts.

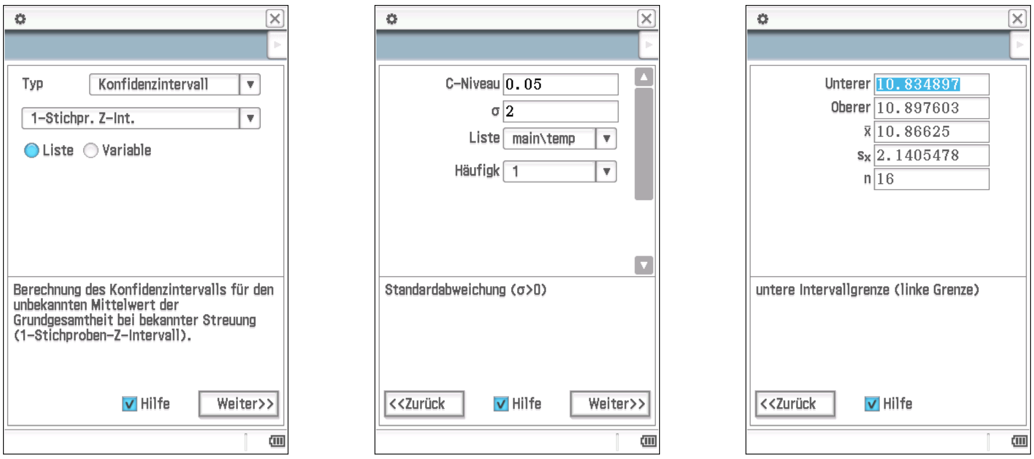

Abbildung 5: Ergebnisse für $\alpha = 0{,}05$

Das Vertrauensintervall ist gleich $[10{,}834897; 10{,}897603]$. Damit gilt nicht $H_0\colon\ \mu \leqslant 10$, sondern $H_1\colon\ \mu > 10$, und es wird H_1 gewählt. Wir müssen noch $1 - \alpha$ berechnen, vgl. Abbildung 6.

Mit der Einstellung `Variable` kommt man zu Abbildung 6, rechts.

Lösung von Beispiel 3. a) Es gilt $\mathbb{E}(X) = 50 \cdot 0{,}2 = 10$.

b) Wir öffnen Statistik und wählen `Calc` $\to$ `Verteilung` $\to$ `Binom. Vert.-fkt`. Wir setzen

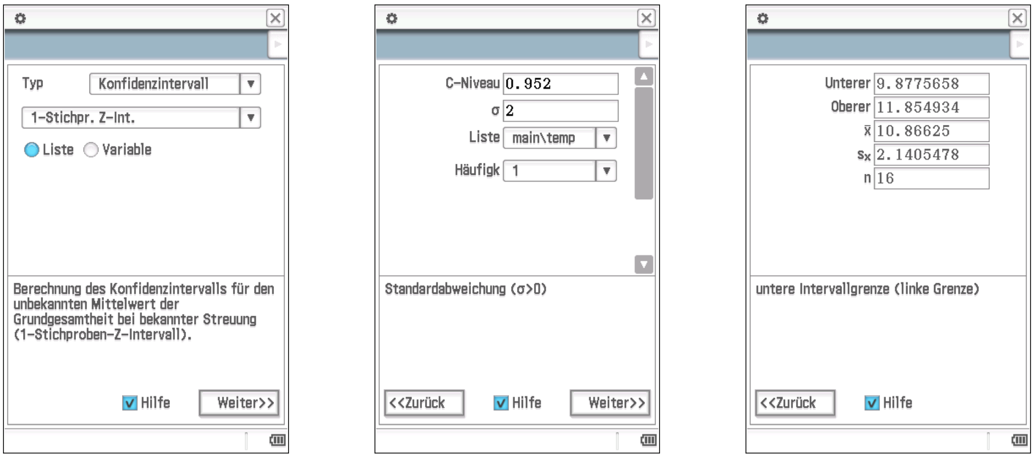

Abbildung 6: Berechnung des Konfidenzintervalls

`Unterer`	0
`Oberer`	1
`Umfang n`	50
`pos`	0.2

Hiermit wird die Wahrscheinlichkeit $P(X \leqslant 1)$ berechnet, vgl. Abbildung 7, links. Analog lassen sich die Wahrscheinlichkeiten für beliebiges k berechnen.

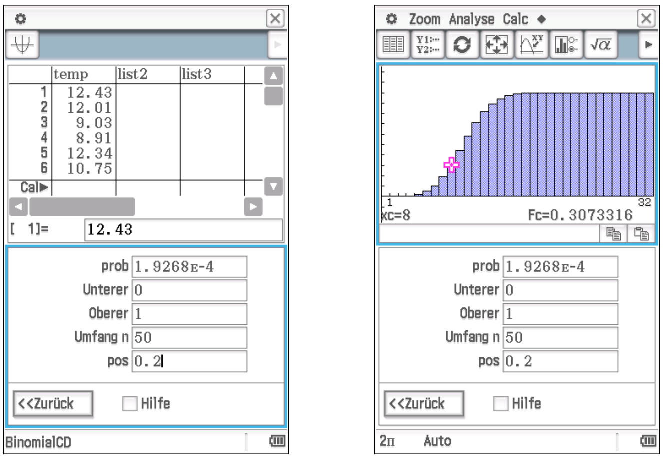

Abbildung 7: Berechnung von $P(X = 1)$ und Zeichnung zu $P(X \leqslant k)$

Für eine anschauliche Darstellung lassen wir uns einen Graphen der Wahrscheinlichkeiten für verschiedene obere Grenzen k zeichnen. Wir wählen und erhalten Abbildung 7, rechts.

Mithilfe von lassen sich für $c = x_c$ die Wahrscheinlichkeiten durch $F_c = P(X \leqslant c)$ ablesen.

c) Am Graphen von F_c aus Teil b) ist erkennbar, dass dies für $c \leqslant 5$ gilt. Der Fehler 2. Art hat für $c = 5$ den geringsten Wert. Im Fall $X \leqslant 5$ wird man daher H_0 ablehnen.

d) Für das Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$ zeigen fünf oder weniger Erfolge eine signifikante Abweichung von dem unter der Hypothese H_0 erwarteten Wert 10 an. Dabei ist der Fehler 1. Art kleiner als $\alpha = 0{,}05$; der Fehler 2. Art wird unter diesen Bedingungen möglichst klein gehalten.